

УДК 512 + 513 + 517

В. А. Касимов, к. фіз.-мат. н., доц.

ПРО КВАЗІПЕРІОДИЧНЕ РІЗНОМАНІТТЯ І КАТЕГОРІЇ

Визначено відношення бордантності квазіперіодичних різноманіть таким чином, щоб інваріант бордизмів типу сигнатури набував нетривіальних числових значень. Побудовано категорії, пов'язані з асимптотичними поданнями груп.

Ключові слова: квазіперіодичний, орієнтований, різноманіття, бордизм, диференційна форма, функція Морса, подрібнення, укрупнення, сигнатура, асимптотичне подання.

Вивчення геометричних об'єктів шляхом алгебраїчних методів призвело до появи нових поглядів і теорій як у геометрії, так і в алгебрі. Як відомо, алгебра функцій різноманіття містить достатньо повну інформацію про це різноманіття. У роботі [4] для вивчення різноманіть запропоновано в деякому сенсі зворотний підхід до цього питання, саме: не різноманіттям зіставляти алгебри, а, навпаки, алгебрами зіставляти різноманіття, алгебри функцій яких ізоморфні вихідним алгебрам. Поняття квазіперіодичного орієнтованого різноманіття узагальнює поняття періодичного орієнтованого різноманіття, яке є універсальним покриттям компактного орієнтованого різноманіття, фундаментальна група якого ізоморфна нескінченній циклічній групі \mathbf{Z} . Ця робота складається з двох частин. У першій частині визначено відношення бордантності квазіперіодичних різноманіть таким чином, щоб інваріант бордизмів типу сигнатури набував нетривіальних числових значень. Другу частину роботи присвячено побудові категорій, пов'язаних з асимптотичними поданнями групи.

Інтерес до квазіперіодичних різноманіть зумовлений тим, що такі різноманіття використовують у різних завданнях топології і геометрії. Так, наприклад, структура квазіперіодичних різноманіть виникає під час розгляду поверхні рівня багатозначних функцій Морса, що задаються морсовськими диференціальними формами з несумірними періодами [1], [2], [3].

Основні визначення

Періодичне різноманіття можна охарактеризувати як таке відкрите різноманіття W_∞ , яке подано у вигляді об'єднання зліченої кількості копій W_k , $-\infty < k < \infty$, компактного орієнтованого різноманіття V , $\varphi_k: W_k \rightarrow V$, межа якого складається з неперетинних двох примірників різноманіття M з протилежними орієнтаціями: $\partial V = M_+ \sqcup M_-$. Отже, $\partial W_k = M_k^- \sqcup M_k^+$, а об'єднання $W_\infty = \bigcup_k W_k$ полягає в ототожненні точок межі $M_k^+ \cong M_{k+1}^-$.

Зрозуміло, на різноманітті W_∞ вільно діє нескінченна група \mathbf{Z} шляхом зсуву точок з одного доданку на інший, $a(x) = \varphi_{k+1}^{-1} \varphi_k(x)$, $x \in W_k$, $a \in \mathbf{Z}$ елемент, що утворює. Чинник різноманіття під дією групи дифеоморфний до різноманіття V після ототожнення його точок на межі в силу ототожнення $M^+ \cong M^-$.

Іншими словами, періодичне (орієнтовне) різноманіття або, точніше, періодична структура на різноманітті характеризується таким набором даних:

- відкритим (орієнтовним) різноманіттям W_∞ ;
- розбиттям W_∞ на підрізноманіття

$$W_\infty = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} W_k; \quad (1)$$

– системою гомоморфізмів (дифеоморфізмів)

$$\varphi_k: W_k \rightarrow V, \quad (2)$$

де V – орієнтоване компактне різноманіття з межею, тобто різноманіття W_k моделюються деяким (одним) різноманіттям V ;

– умовами на покриття (1):

$$\partial W_k = (W_{k-1} \cap W_k) \sqcup (W_k \cap W_{k+1}) = M_k^- \sqcup M_k^+, \quad (3)$$

$$W_k \cap W_{k+1} = \partial W_k \cap \partial W_{k+1} = M_k^+ = M_{k+1}^-. \quad (4)$$

Набір даних (1), (2), (3), (4) індукує вільну дію нескінченної циклічної групи \mathbf{Z} на різноманітті W_∞ , перетворюючи його на тотальний простір покриття над компактным різноманіттям.

Структура квазіперіодичного різноманіття на W_∞ відрізняється від структури періодичного різноманіття тільки тим, що гомеоморфізми (2) замінюються на гомеоморфізми

$$\varphi_k: W_k \rightarrow V_\alpha, \quad \alpha = \alpha(k), \quad (5)$$

де індекс $\alpha \in A$ пробігає деяку кінцеву множину, тобто різноманіття W_k моделюється кількома різноманіттями V_α , причому функція $\alpha = \alpha(k)$ не є постійною ні на якому інтервалі $(-\infty, k]$ або $[k, \infty)$. Решта умов (1), (3), (4) під час визначення структури квазіперіодичного різноманіття зберігаються.

Розглянемо, наприклад, компактне різноманіття X з фундаментальної групи $\pi_1(X) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. Нехай $\omega \in \Omega_1(X)$ – замкнена морсовська форма на різноманітті X . Нехай $p: \tilde{X} \rightarrow X$ – універсальне покриття, $\tilde{\omega} = p^*(\omega)$, f – функція Морса на покритті \tilde{X} , $df = \tilde{\omega}$. Розглянемо неособливе значення c функції f і поверхню рівня $W_\infty = \{f = c\}$. Нехай $a, b \in \pi_1(X)$ – твірні фундаментальної групи, а періоди

$$\lambda_1 = \int_a \omega \quad \lambda_2 = \int_b \omega$$

– несумірні. Отже, вони, принаймні, не дорівнюють нулю. Нехай $Y \subset X$ – підрізоманіття корозмірності 1 – двоїсте, скажімо, елементу $a \in H_1(X; \mathbf{Z})$. Без обмеження загальності можна припустити, що різноманіття W_∞ і $p^{-1}(Y)$ перетинаються трансверсально, а обмеження функції f на підрізоманітті $p^{-1}(Y)$ є функцією Морса. Тоді підрізоманіття $p^{-1}(Y)$ розбиває різноманіття W_∞ на компоненти, що утворюють структуру квазіперіодичного різноманіття.

Структура квазіперіодичного різноманіття може бути піддана двом природним операціям: *подрібненню і укрупненню*.

Подрібнення полягає в тому, що різноманіття V_α , у свою чергу, можуть бути подані у вигляді кінцевого розбиття типу (1), (5), (3), (4), що дозволяє отримати більш дрібне розбиття різноманіття W_∞ .

Укрупнення полягає в тому, що за заданої строго монотонної послідовності n_k з умовою, що $n_{k+1} - n_k < \text{Const}$, як розбиття беруться різноманіття $W'_k = W_{[n_k \dots n_{k+1}-1]}$.

Нехай F – лівоінваріантний нормалізований функціонал на просторі $L^\infty(\mathbf{Z})$ обмежених функцій на вільній циклічній групі \mathbf{Z} . Розглянемо функцію $s(m)$, $m \in \mathbf{Z}$, що задана формулою

$$s(m) = \frac{\text{sign} X_{[k_{n+1} \dots l_{n+1}]} - \text{sign} X_{[k_n \dots l_n]}}{l_{n+1} - k_{n+1} - l_n + k_n - 2}, \quad k_{n+1} \leq m \leq k_n \text{ або } k_n \leq m \leq k_{n+1}.$$

Теорема 1. Функція $s(m)$ обмежена, тобто $s \in L^\infty(\mathbf{Z})$ і значення функціоналу

$$\text{sign}(W_\infty) = F(s)$$

не залежить від вибору підпоследовностей k_n, l_n .

Теорема 1 потребує додаткового дослідження інваріантності зазначеного в теоремі значення $\text{sign}(W_\infty)$ щодо деякого відношення бордантності квазіперіодичних різноманіть. Нехай задано квазіперіодичне (орієнтоване) різноманіття W_∞ , тобто задано структуру квазіперіодичного різноманіття у вигляді розбиття (1), що задовольняє умови (5), (3), (4). Скажімо, що різноманіття W_∞ бордантне нулю, якщо воно є межею іншого (орієнтованого) різноманіття P_∞ , яке допускає розбиття у вигляді об'єднання

$$P_\infty = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} P_k,$$

гомеоморфізми

$$\psi_k: P_k \rightarrow Q_\alpha, \quad \alpha = \alpha(k),$$

які задовольняють умови

$$\partial P_k = (P_{k-1} \cap P_k \sqcup W_k \sqcup (P_k \cap P_{k+1})) = N_k^- \sqcup W_k \sqcup N_k^+,$$

$$P_k \cap P_{k+1} = \partial P_k \cap \partial P_{k+1} = N_k^+ = N_{k+1}^-,$$

$$\partial N_k^+ = M_k^+ = M_{k+1}^- = \partial N_{k+1}^-.$$

Орієнтації всіх різноманіть повинні бути узгоджені за звичайними правилами.

Умови (3), (4), (5) визначають на різноманітті W_∞ структуру так званого квазіперіодичного різноманіття. Можна визначити відповідне відношення еквівалентності таких структур. Іншими словами, визначивши клас так званих квазіперіодичних відображень, дві структури квазіперіодичного різноманіття будемо вважати еквівалентними, якщо тотожне відображення з однієї структури в іншу є квазіперіодичним. Зокрема, розглянемо деяку квазіперіодичну структуру

$$W_\infty = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} W_k$$

і деяке її укрупнення

$$W_\infty = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} W'_k = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} W_{[n_k \dots n_{k+1}-1]}$$

з умовою

$$1 \leq n_{k+1} - n_k \leq \lambda = \text{Const}. \quad (6)$$

Умова (6) означає, що

$$k \leq n_k \leq \lambda k.$$

Отже, нехай задано два квазіперіодичних різноманіття W_∞ і W'_∞ зі структурою квазіперіодичних різноманіть, описаних умовами (1), (5), (3), (4). Відображення

$f: W_\infty \rightarrow W'_\infty$ називають *квазіперіодичним*, якщо існує послідовність n_k і константа λ , що задовольняють умови:

1. $1 \leq n_{k+1} - n_k \leq \lambda = \text{Const}$;
2. $f(W_k) \subset W'_{[n_k \dots n_{k+1} + \lambda]}$;
3. *Відображення*

$$u_k = (\varphi_k \cup \varphi_{k+1}) \circ f \circ \varphi_k^{-1} : V_{\alpha(k)} \rightarrow \left(\bigcup_{j=n_k}^{n_{k+1} + \lambda} V'_{\alpha'(f)} \right)$$

набувають кінцеву кількість значень.

Теорема 2. *Тотожне відображення квазіперіодичної структури в її укрупнення є квазіперіодичним відображенням.*

Композиція квазіперіодичних відображень є квазіперіодичним відображенням.

Якщо квазіперіодичне відображення є дифеоморфізмом, то зворотне відображення теж є квазіперіодичним.

Теорема 2 вводить відношення еквівалентності на множині всіх квазіперіодичних структур. Виникає проблема опису множини класів еквівалентності квазіперіодичних структур. Ми висловлюємо гіпотезу, що на будь-якому квазіперіодичному різноманітті є тільки один клас еквівалентних квазіперіодичних структур. Підставою для такої гіпотези є таке міркування. Якщо різноманіття W_∞ розбито двома способами у квазіперіодичні структури

$$W_\infty = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} W_k = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} W'_k ,$$

то кожне підрізноманіття W'_k лежить у кінцевому об'єднанні $W'_k \subset \bigcup_{j=n_k}^{m(k)} W_j$. Суттєвим у нашій

гіпотезі є міркування, що $m(k) - n(k)$ має бути обмежене деякою константою. В іншому випадку, із суто гомологічних міркувань різноманіття W'_k не можуть бути дифеоморфні один одному.

Категорії асимптотичних уявлень

Побудуємо дві категорії, пов'язані з асимптотичними поданнями. Першу з них будують таким чином. Нехай $A - C^*$ – алгебра з одиницею, G – топологічна (компактна) група. Позначимо через $a.R(G, A)$ клас усіх асимптотичних подань групи G у гільбертових C^* – A модулях. Далі, M і L – гільбертові модулі над алгеброю A і задані $a.G$ подання $\Phi = \{\Phi_n : G \rightarrow GL(M)\}_{n \in \mathbb{N}}$ та $\Psi = \{\Psi_n : G \rightarrow GL(L)\}_{n \in \mathbb{N}}$ групи G в модулях M та L відповідно. Кожне $a.G$ подання Φ групи G в модулі M природно визначає в модулі M $a.G$ дію, а саме: сімейство $\varphi = \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, визначене за формулою $\varphi_n(g, m) = \Phi_n(g)(m)$, є $a.$ дією групи G в модулі M . Отже, (M, φ) є модулем. Так само визначається $a.G$ модуль (L, ψ) . Позначимо через $a.Hom_A(M, L)$ клас усіх A -гомоморфізмів $f : M \rightarrow L$, які задовольняють умову C1 роботи [3]. Ці самі гомоморфізми називатимемо гомоморфізмами, які сплітають $a.$, подань Φ і Ψ і позначимо через $f : \Phi \rightarrow \Psi$. Множина всіх гомоморфізмів, які сплітають, подань Φ і Ψ позначимо через $mor(\Phi, \Psi)$. Отже,

$$mor(\Phi, \Psi) = a.Hom_A(M, L). \quad (7)$$

Легко перевірити справедливості таких властивостей.

Властивість 1. Сума гомоморфізмів, які сплітають, також є сплітальним гомоморфізмом, Наукові праці ВНТУ, 2012, № 1

тобто якщо $f, g \in \text{mor}(\Phi, \Psi)$, то $f + g \in \text{mor}(\Phi, \Psi)$.

Властивість 2. Якщо $f : \Phi \rightarrow \Psi$ – гомоморфізм, який сплітає, $a \in A$, то af також є сплітальним гомоморфізмом.

Властивість 3. Гомоморфізми, які сплітають, утворюють підмодуль $\text{mor}_A(\Phi, \Psi)$ в A -модулі $\text{Hom}_A(M, L)$.

Множину всіх гомоморфізмів, які сплітають, подань групи G позначимо через $a.\text{Mor}(G)$. Пара класів $(a.R(A, G), a.\text{Mor}G)$ утворює категорію асимптотичних уявлень і сплітає гомоморфізм. Позначимо цю категорію через $\mathbf{a.R}(A, G)_1$.

Друга категорія асимптотичних уявлень будується так. Клас об'єктів $a.R(A, G)$ не змінюється. Нехай $\Phi = \{\Phi_n : G \rightarrow GL(M)\}_{n \in \mathbb{N}}$ і $\Psi = \{\Psi_n : G \rightarrow GL(L)\}_{n \in \mathbb{N}}$ – два $a.G$ подання з $a.R(A, G)$. Родину $\alpha = \{\alpha_n : M \rightarrow L\}_{n \in \mathbb{N}}$ A -гомоморфізмів назвемо асимптотично сплітальним (a -сплітальним) гомоморфізмом, який сплітає $a.G$ подання Φ і Ψ , якщо виконується така умова:

$$\|\alpha_n \circ \Phi_n(g) - \Psi_n(g) \circ \alpha_n\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Якщо α є α -сплітальним гомоморфізмом α -подавань Φ і Ψ , то це позначимо через $\alpha : \Phi \sim \Psi$.

Пропозиція 1. Відношення асимптотичної сплітальності є рефлексивним і транзитивним.

Зіставляючи клас морфізмів кожної категорії з деяким групоїдом, ми можемо трактувати гомоморфізми групоїдів як функтори. Нехай $(\mathbf{G}, \mathbf{G}'; \varphi)$ і $(\mathbf{H}, \mathbf{H}'; \varphi)$ – групоїди, а K_G й K_H – відповідні категорії, а саме: відповідності $E_G : \mathbf{G} \rightarrow \text{MOR}(K_G)$ та $E_H : \mathbf{H} \rightarrow \text{MOR}(K_H)$ зіставляють з групоїдами $(\mathbf{G}, \mathbf{G}'; \varphi)$ і $(\mathbf{H}, \mathbf{H}'; \varphi)$ класи морфізмів категорій K_G і K_H відповідно. Розглянемо контрваріантний функтор $F : K_G \rightarrow K_H$. Визначимо гомоморфізм $F^\# : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ таким чином: якщо $F(\mathbf{g}) = \mathbf{h}$, то $F^\#(g) = h$, де $E_G : (g) = \mathbf{g}$ і $E_H : (h) = \mathbf{h}$. Тоді для $\varphi(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1) \in \mathbf{G}'$ маємо $F(\varphi(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_1)) = \varphi(F(\mathbf{g}_1), F(\mathbf{g}_1))$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса / С. П. Новиков // Успехи математических наук. – 1982. – Т. 37. – Вып. 5. – С. 3 – 49.
2. Алания Л. А. О топологической структуре поверхностей уровня морсовских 1-форм // Успехи математических наук. – 1991. – Т. 46 – Вып. 3. – С. 179 – 180.
3. Касимов В. А. О связях некоторых новых классов многообразий с теорией категорий / В. А. Касимов // Тезисы Международной конференции по математике и механике, посвященной 50-летию Института Математики и Механики НАН Азербайджана. – Баку. – 2009. – С. 171 – 172.
4. Кассель К. Квантовые группы / К. Кассель. М.: Фазис, 1999. – 666 с.

Касимов Вагіф Алі-Мухтар огли – к. фіз.-мат. н., доц., завідувач кафедри алгебри та геометрії; тел.: (99412) 510-33-64, 465-87-11, E-Mail: kavagif@mail.ru
Бакинський державний університет.